

Дәріс №4. Бірінші және екінші текті меншіксіз интегралдар. Жинақтылығы.

Меншіксіз интегралдар. Анықталған интегралды қарастырғанда интегралдың төменгі және жоғары шектері – ақырлы сандар және интеграл астындағы функция –интегралдау аралығында ақырлы функция болуын талап еттік. Егер осы қойылған шарттардың біреуі орындалмаса, интеграл **меншіксіз интеграл** деп аталады.

1. Ақырсыз шектері бар меншіксіз интегралдар. Айталық, $y = f(x)$ функциясы $[a, +\infty)$ аралығында үзіліссіз болсын. Осы функциядан a -дан $+\infty$ дейін алынған меншіксіз интеграл деп

мына шекті айтамыз:
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$
 Егер осы шек бар (санға тең) болса, онда меншіксіз

интегралы жинақты, ал шегі жоқ немесе шексіздікке тең болса, онда интеграл жинақсыз деп аталады. Егер $[a, +\infty)$ аралығында $f(x) \geq 0$ болса, онда мұндай интеграл шекаралары: $y=0$, $x=a$ ($x \geq a$) түзулерімен және $y=f(x)$ функциясының графигімен шектелген фигураның ауданын береді. Жинақты интеграл үшін бұл аудан шектеулі, ал жинақсыз интеграл үшін шектеусіз болады.

5-мысал.
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = \infty.$$
 Демек, интеграл жинақсыз.

Айталық, $y = f(x)$ функциясы $(-\infty, b]$ аралығында үзіліссіз болсын. Сонда $-\infty$ -тен b -ға дейінгі

меншіксіз интеграл деп мына шекті айтамыз
$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Мұндай интеграл ($f(x) \geq 0$ болғанда) шекаралары $y=0$, $x=b$ ($x \leq b$) және $y=f(x)$ болған фигураның ауданын өрнектейді.

Егер $y = f(x)$ функциясы бүкіл сандар осінде үзіліссіз болса, онда $-\infty$ -тен $+\infty$ -ке дейінгі меншіксіз интеграл деп мына екі интегралдың қосындысын айтамыз

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

(мұнда c -кез келген сан). Бұл анықтама c -ны таңдап алуға байланыссыз. Мұндағы екі интеграл да

жинақты болса, онда ол интеграл жинақты деп аталады. $\int_{-\infty}^c f(x)dx$ және $\int_c^{+\infty} f(x)dx$. Егер осы

интегралдың біреуі жинақсыз болса, онда $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ интегралы жинақсыз деп аталады.

2. Ақырсыз функцияның меншіксіз интегралы

Айталық, $y = f(x)$ функциясы $[a, b)$ аралығында үзіліссіз, ал $x=b$ нүктесінде ақырсыз болсын. a -дан b -ның сол жағына дейін осы функциядан алынған меншіксіз интеграл деп сол жақ шекті айтады.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Егер $y = f(x)$ функциясы $(a, b]$ аралығында үзіліссіз, ал a нүктесінде үзілісті болса, онда a -ның оң жағынан b -ға дейінгі осы функцияның меншікті интегралы деп мына оң жақ шекті айтады

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

6- мысал. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_{0+\varepsilon}^1 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{0+\varepsilon} \right) = \infty$, яғни, интеграл жинақсыз.

Мына меншіксіз интегралдардың жазылуы жақсылық емес (зұлымдық), себебі үзіліссіз функциялардың анықталған интегралдарынан айырмашылығы жоқ.

Айталық, $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралығындағы (a, b) интервалының үзіліске ұшырайтын c нүктесінен басқа жерлерінде үзіліссіз болсын. Сонда осы кесіндіден алынған меншіксіз интегралы деп келесі екі меншіксіз интегралдардың қосындысын айтамыз.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Оң жағындағы екі интеграл жинақты болса, онда мұндай интегралды жинақты деп атайды.